2008～2019 北京中考数学分类(几何综合)

一．解答题（共 12 小题）

1．已知∠AOB＝30°，H 为射线 OA 上一定点，$OH=\sqrt{3}+1$，P 为射线 OB 上一点，M 为线段 OH 上一动点，连接 PM，满足∠OMP 为钝角，以点 P 为中心，将线段 PM 顺时针旋转 150°，得到线段 PN，连接 ON.

（1）依题意补全图 1；

（2）求证：∠OMP＝∠OPN；

（3）点 M 关于点 H 的对称点为 Q，连接 QP．写出一个 OP 的值，使得对于任意的点 M 总有 ON＝QP，并证明．

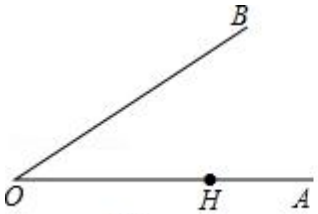
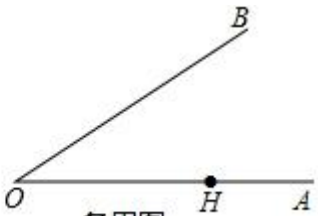


图1

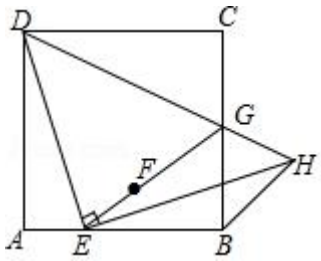


备用图

2．如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上的一动点（不与点 A、B 重合），连接 DE，点 A 关于直线 DE 的对称点为 F，连接 EF 并延长交 BC 于点 G，连接 DG，过点 E 作 EH⊥DE 交 DG 的延长线于点 H，连接 BH.

（1）求证：GF＝GC；

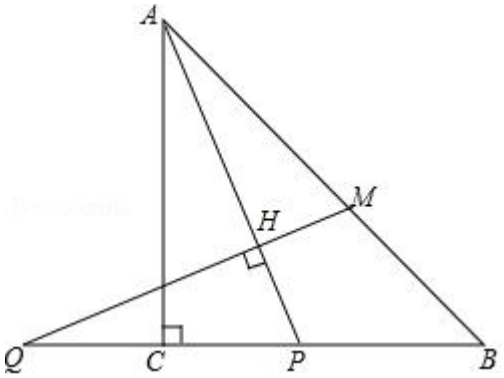
（2）用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系，并证明．



3．在等腰直角△ABC 中，∠ACB＝90°，P 是线段 BC 上一动点（与点 B、C 不重合），连接 AP，延长 BC 至点 Q，使得 CQ＝CP，过点 Q 作 QH⊥AP 于点 H，交 AB 于点 M.

（1）若∠PAC＝α，求∠AMQ 的大小（用含α的式子表示）．

（2）用等式表示线段 MB 与 PQ 之间的数量关系，并证明．



4．在等边△*ABC* 中，

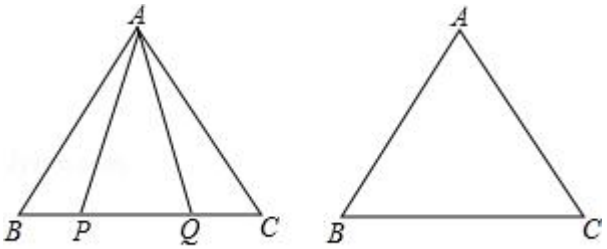


图1　　图2

（1）如图 1，*P*，*Q* 是 *BC* 边上的两点，*AP*＝*AQ*，∠*BAP*＝20°，求∠*AQB* 的度数；

（2）点 *P*，*Q* 是 *BC* 边上的两个动点（不与点 *B*，*C* 重合），点 *P* 在点 *Q* 的左侧，且 *AP*＝*AQ*，点 *Q* 关于直线 *AC* 的对称点为 *M*，连接 *AM*，*PM*.

①依题意将图 2 补全；

②小茹通过观察、实验提出猜想：在点 *P*，*Q* 运动的过程中，始终有 *PA*＝*PM*，小茹把这个猜想与同学们进行交流，通过讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

想法 1：要证明 *PA*＝*PM*，只需证△*APM* 是等边三角形；

想法 2：在 *BA* 上取一点 *N*，使得 *BN*＝*BP*，要证明 *PA*＝*PM*，只需证△*ANP*≌△*PCM*；

想法 3：将线段 *BP* 绕点 *B* 顺时针旋转 60°，得到线段 *BK*，要证 *PA*＝*PM*，只需证 *PA*＝*CK*，*PM*＝*CK*…

请你参考上面的想法，帮助小茹证明 *PA*＝*PM*（一种方法即可）.

5．在正方形 *ABCD* 中，*BD* 是一条对角线，点 *P* 在射线 *CD* 上（与点 *C*、*D* 不重合），连接 *AP*，平移△*ADP*，使点 *D* 移动到点 *C*，得到△*BCQ*，过点 *Q* 作 *QH*⊥*BD* 于 *H*，连接 *AH*，*PH*.

（1）若点 *P* 在线段 *CD* 上，如图 1.

①依题意补全图 1；

②判断 *AH* 与 *PH* 的数量关系与位置关系并加以证明；

（2）若点 *P* 在线段 *CD* 的延长线上，且∠*AHQ*＝152°，正方形 *ABCD* 的边长为 1，请

写出求 DP 长的思路.（可以不写出计算结果）

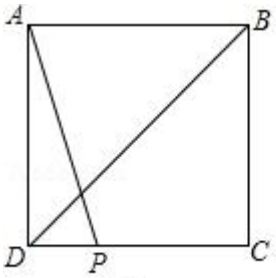
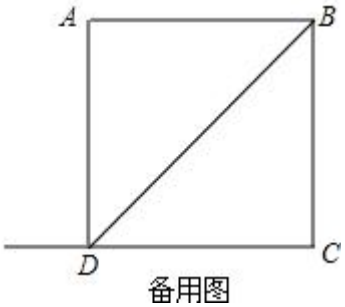


图1



备用图

6．在正方形 $ABCD$ 外侧作直线 AP，点 B 关于直线 AP 的对称点为 E，连接 BE，DE，其中 DE 交直线 AP 于点 F.

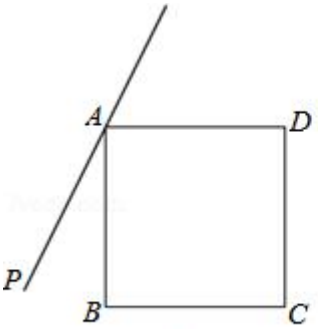


图1

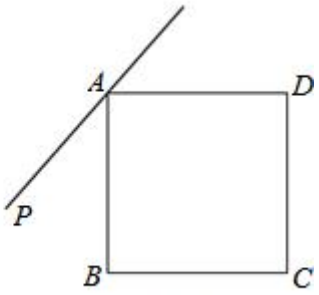


图2

（1）依题意补全图 1；

（2）若 $\angle PAB=20°$，求 $\angle ADF$ 的度数；

（3）如图 2，若 $45°<\angle PAB<90°$，用等式表示线段 AB，FE，FD 之间的数量关系，并证明.

7．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$（$0°<\alpha<60°$），将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60°得到线段 BD.

（1）如图 1，直接写出 $\angle ABD$ 的大小（用含α的式子表示）；

（2）如图 2，$\angle BCE=150°$，$\angle ABE=60°$，判断 $\triangle ABE$ 的形状并加以证明；

（3）在（2）的条件下，连接 DE，若 $\angle DEC=45°$，求α的值.

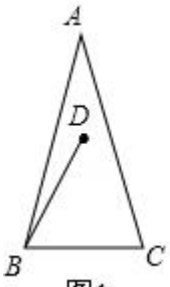


图1

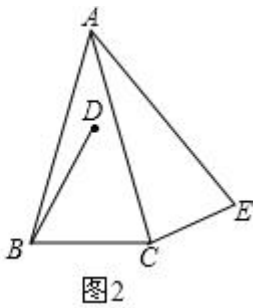


图2

8．在 $\triangle ABC$ 中，$BA=BC$，$\angle BAC=\alpha$，M 是 AC 的中点，P 是线段 BM 上的动点，将线段

PA 绕点 P 顺时针旋转 2α 得到线段 PQ.

（1）若 $\alpha=60°$ 且点 P 与点 M 重合（如图 1），线段 CQ 的延长线交射线 BM 于点 D，请补全图形，并写出 $\angle CDB$ 的度数；

（2）在图 2 中，点 P 不与点 B，M 重合，线段 CQ 的延长线于射线 BM 交于点 D，猜想 $\angle CDB$ 的大小（用含 α 的代数式表示），并加以证明；

（3）对于适当大小的 α，当点 P 在线段 BM 上运动到某一位置（不与点 B，M 重合）时，能使得线段 CQ 的延长线与射线 BM 交于点 D，且 $PQ=QD$，请直接写出 α 的范围.

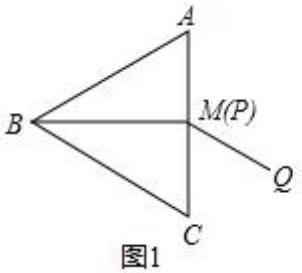


图1

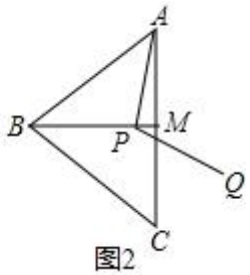


图2

9．在▱ $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E，交直线 DC 于点 F.

（1）在图 1 中证明 $CE=CF$；

（2）若 $\angle ABC=90°$，G 是 EF 的中点（如图 2），直接写出 $\angle BDG$ 的度数；

（3）若 $\angle ABC=120°$，$FG\parallel CE$，$FG=CE$，分别连接 DB、DG（如图 3），求 $\angle BDG$ 的度数.

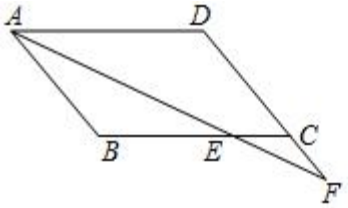


图 1

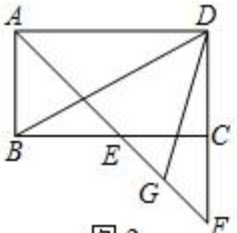


图 2

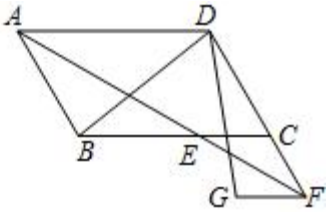


图 3

10．问题：已知△ABC 中，$\angle BAC=2\angle ACB$，点 D 是△ABC 内的一点，且 $AD=CD$，$BD=BA$．探究 $\angle DBC$ 与 $\angle ABC$ 度数的比值.

请你完成下列探究过程：

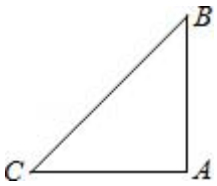
先将图形特殊化，得出猜想，再对一般情况进行分析并加以证明.

（1）当 $\angle BAC=90°$ 时，依问题中的条件补全右图；

观察图形，AB 与 AC 的数量关系为_____；当推出 $\angle DAC=15°$ 时，可进一步推出 $\angle DBC$ 的度数为_____；可得到 $\angle DBC$ 与 $\angle ABC$ 度数的比值为_____；

（2）当 $\angle BAC<90°$ 时，请你画出图形，研究 $\angle DBC$ 与 $\angle ABC$ 度数的比值是否与（1）

中的结论相同，写出你的猜想并加以证明．



11．在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 C 作 $CE\perp CD$ 交 AD 于点 E，将线段 EC 绕点 E 逆时针旋转 90°得到线段 EF（如图 1）

（1）在图 1 中画图探究：

①当 P_1 为射线 CD 上任意一点（P_1 不与 C 重合）时，连接 EP_1；绕点 E 逆时针旋转 90°得到线段 EG_1．判断直线 FG_1 与直线 CD 的位置关系，并加以证明；

②当 P_2 为线段 DC 的延长线上任意一点时，连接 EP_2，将线段 EP_2 绕点 E 逆时针旋转 90°得到线段 EG_2．判断直线 G_1G_2 与直线 CD 的位置关系，画出图形并直接写出你的结论．

（2）若 $AD=6$，$\tan B=\frac{4}{3}$，$AE=1$，在①的条件下，设 $CP_1=x$，$S_{\triangle P1FG1}=y$，求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围．

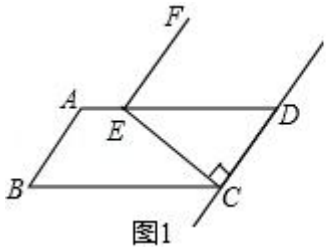


图1

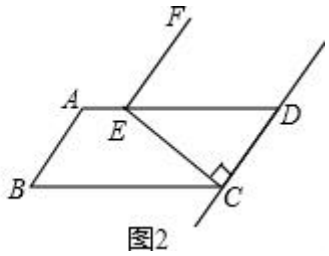


图2

12．请阅读下列材料：

问题：如图 1，在菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 中，点 A，B，E 在同一条直线上，P 是线段 DF 的中点，连接 PG，PC．若 $\angle ABC=\angle BEF=60°$，探究 PG 与 PC 的位置关系及 $\frac{PG}{PC}$ 的值．

小聪同学的思路是：延长 GP 交 DC 于点 H，构造全等三角形，经过推理使问题得到解决．请你参考小聪同学的思路，探究并解决下列问题：

（1）写出上面问题中线段 PG 与 PC 的位置关系及 $\frac{PG}{PC}$ 的值；

（2）将图 1 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，使菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一条直线上，原问题中的其他条件不变（如图 2）．你在（1）中得到的两个结论是否发生变化？写出你的猜想并加以证明；

（3）若图 1 中 $\angle ABC=\angle BEF=2\alpha$（$0°<\alpha<90°$），将菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转

任意角度，原问题中的其他条件不变，请你直接写出$\frac{PG}{PC}$的值（用含α的式子表示）.

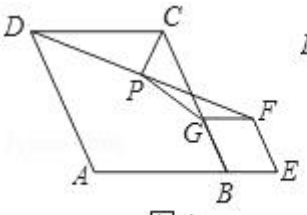


图 1

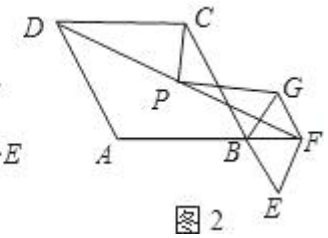


图 2

2008～2019 北京中考数学分类(几何综合)

参考答案与试题解析

一．解答题（共 12 小题）

1．已知∠*AOB*＝30°，*H* 为射线 *OA* 上一定点，*OH*＝$\sqrt{3}$+1，*P* 为射线 *OB* 上一点，*M* 为线段 *OH* 上一动点，连接 *PM*，满足∠*OMP* 为钝角，以点 *P* 为中心，将线段 *PM* 顺时针旋转 150°，得到线段 *PN*，连接 *ON*.

（1）依题意补全图 1；

（2）求证：∠*OMP*＝∠*OPN*；

（3）点 *M* 关于点 *H* 的对称点为 *Q*，连接 *QP*．写出一个 *OP* 的值，使得对于任意的点 *M* 总有 *ON*＝*QP*，并证明．

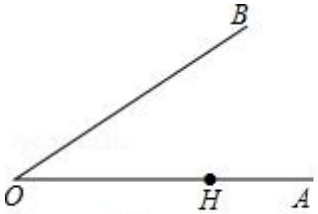
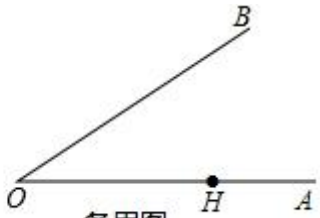


图1



备用图

【解答】解：（1）如图 1 所示为所求．

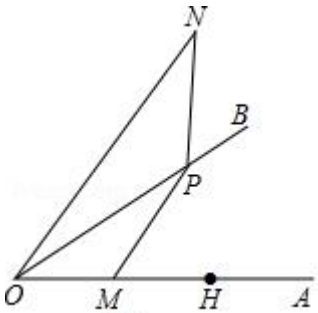


图1

（2）设∠*OPM*＝α，

∵线段 *PM* 绕点 *P* 顺时针旋转 150°得到线段 *PN*

∴∠*MPN*＝150°，*PM*＝*PN*

∴∠*OPN*＝∠*MPN*﹣∠*OPM*＝150°﹣α

∵∠*AOB*＝30°

∴∠*OMP*＝180°﹣∠*AOB*﹣∠*OPM*＝180°﹣30°﹣α＝150°﹣α

∴∠*OMP*＝∠*OPN*

（3）$OP=2$ 时，总有 $ON=QP$，证明如下：

过点 N 作 $NC\perp OB$ 于点 C，过点 P 作 $PD\perp OA$ 于点 D，如图 2

$\therefore\angle NCP=\angle PDM=\angle PDQ=90^\circ$

$\because\angle AOB=30^\circ$，$OP=2$

$\therefore PD=\frac{1}{2}OP=1$

$\therefore OD=\sqrt{OP^2-PD^2}=\sqrt{3}$

$\because OH=\sqrt{3}+1$

$\therefore DH=OH-OD=1$

$\because\angle OMP=\angle OPN$

$\therefore 180^\circ-\angle OMP=180^\circ-\angle OPN$

即 $\angle PMD=\angle NPC$

在 $\triangle PDM$ 与 $\triangle NCP$ 中

$$\begin{cases}\angle PDM=\angle NCP\\ \angle PMD=\angle NPC\\ PM=NP\end{cases}$$

$\therefore\triangle PDM\cong\triangle NCP$（$AAS$）

$\therefore PD=NC$，$DM=CP$

设 $DM=CP=x$，则 $OC=OP+PC=2+x$，$MH=MD+DH=x+1$

$\because$ 点 M 关于点 H 的对称点为 Q

$\therefore HQ=MH=x+1$

$\therefore DQ=DH+HQ=1+x+1=2+x$

$\therefore OC=DQ$

在 $\triangle OCN$ 与 $\triangle QDP$ 中

$$\begin{cases}OC=QD\\ \angle OCN=\angle QDP=90^\circ\\ NC=PD\end{cases}$$

$\therefore\triangle OCN\cong\triangle QDP$（$SAS$）

$\therefore ON=QP$

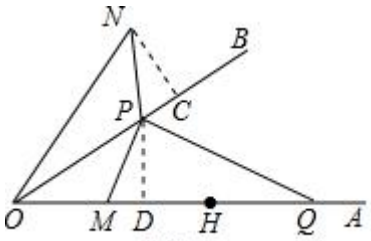
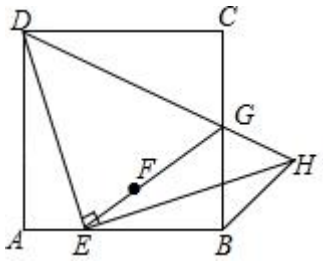


图2

2．如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上的一动点（不与点 A、B 重合），连接 DE，点 A 关于直线 DE 的对称点为 F，连接 EF 并延长交 BC 于点 G，连接 DG，过点 E 作 $EH\perp DE$ 交 DG 的延长线于点 H，连接 BH.

（1）求证：$GF=GC$；

（2）用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系，并证明.



【解答】证明：（1）如图 1，连接 DF，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$DA=DC$，$\angle A=\angle C=90°$，

∵点 A 关于直线 DE 的对称点为 F，

∴$\triangle ADE\cong\triangle FDE$，

∴$DA=DF=DC$，$\angle DFE=\angle A=90°$，

∴$\angle DFG=90°$，

在 Rt$\triangle DFG$ 和 Rt$\triangle DCG$ 中，

∵$\begin{cases}DF=DC\\DG=DG\end{cases}$，

∴Rt$\triangle DFG\cong$Rt$\triangle DCG$（HL），

∴$GF=GC$；

（2）$BH=\sqrt{2}AE$，理由是：

证法一：如图 2，在线段 AD 上截取 AM，使 $AM=AE$，

∵$AD=AB$，

∴$DM=BE$，

由（1）知：∠1＝∠2，∠3＝∠4，

∵∠*ADC*＝90°，

∴∠1+∠2+∠3+∠4＝90°，

∴2∠2+2∠3＝90°，

∴∠2+∠3＝45°，

即∠*EDG*＝45°，

∵*EH*⊥*DE*，

∴∠*DEH*＝90°，△*DEH* 是等腰直角三角形，

∴∠*AED*+∠*BEH*＝∠*AED*+∠1＝90°，*DE*＝*EH*，

∴∠1＝∠*BEH*，

在△*DME* 和△*EBH* 中，

$$\because \begin{cases} DM=BE \\ \angle 1=\angle BEH, \\ DE=EH \end{cases}$$

∴△*DME*≌△*EBH*（*SAS*），

∴*EM*＝*BH*，

Rt△*AEM* 中，∠*A*＝90°，*AM*＝*AE*，

∴$EM=\sqrt{2}AE$，

∴$BH=\sqrt{2}AE$；

证法二：如图 3，过点 *H* 作 *HN*⊥*AB* 于 *N*，

∴∠*ENH*＝90°，

由方法一可知：*DE*＝*EH*，∠1＝∠*NEH*，

在△*DAE* 和△*ENH* 中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle ENH \\ \angle 1=\angle NEH, \\ DE=EH \end{cases}$$

∴△*DAE*≌△*ENH*（*AAS*），

∴*AE*＝*HN*，*AD*＝*EN*，

∵*AD*＝*AB*，

∴*AB*＝*EN*＝*AE*+*BE*＝*BE*+*BN*，

∴*AE*＝*BN*＝*HN*，

∴△*BNH* 是等腰直角三角形，

∴$BH=\sqrt{2}HN=\sqrt{2}AE$.

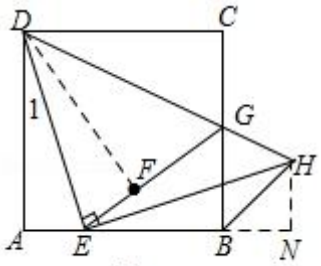


图3

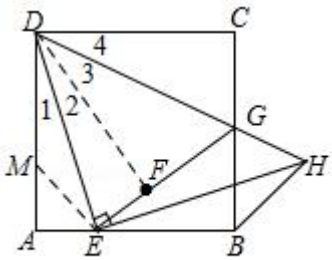


图2

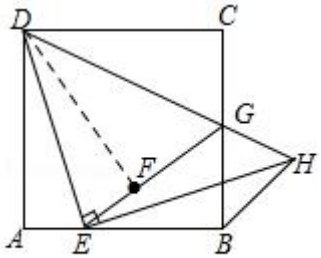
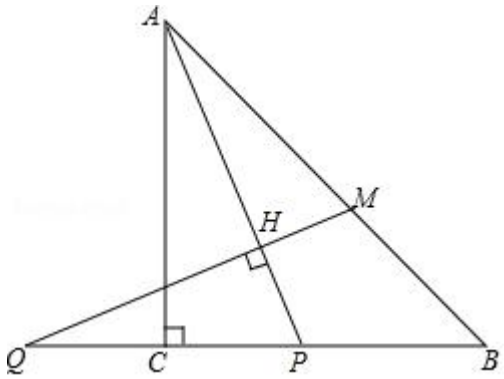


图1

3．在等腰直角△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*P* 是线段 *BC* 上一动点（与点 *B*、*C* 不重合），连接 *AP*，延长 *BC* 至点 *Q*，使得 *CQ*＝*CP*，过点 *Q* 作 *QH*⊥*AP* 于点 *H*，交 *AB* 于点 *M*．

（1）若∠*PAC*＝α，求∠*AMQ* 的大小（用含α的式子表示）．

（2）用等式表示线段 *MB* 与 *PQ* 之间的数量关系，并证明．



【解答】解：（1）∠*AMQ*＝45°＋α；理由如下：

∵∠*PAC*＝α，△*ACB* 是等腰直角三角形，

∴∠*BAC*＝∠*B*＝45°，∠*PAB*＝45°－α，

∵$QH\perp AP$，

∴$\angle AHM=90°$，

∴$\angle AMQ=180°-\angle AHM-\angle PAB=45°+\alpha$；

（2）$PQ=\sqrt{2}MB$；理由如下：

连接 AQ，作 $ME\perp QB$，如图所示：

∵$AC\perp QP$，$CQ=CP$，

∴$\angle QAC=\angle PAC=\alpha$，

∴$\angle QAM=45°+\alpha=\angle AMQ$，

∴$AP=AQ=QM$，

在△APC 和△QME 中，

$$\begin{cases}\angle MQE=\angle PAC\\ \angle ACP=\angle QEM\\ AP=QM\end{cases}$$，

∴△APC≌△QME（AAS），

∴$PC=ME$，

∵△MEB 是等腰直角三角形，

∴$\frac{1}{2}PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}MB$，

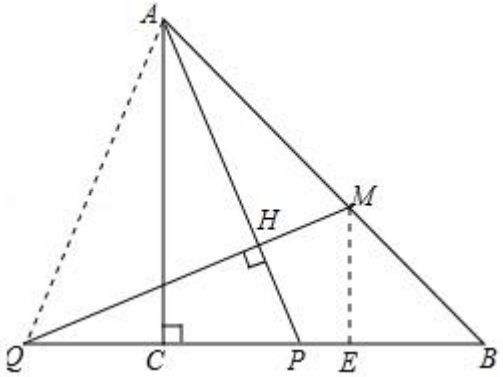
∴$PQ=\sqrt{2}MB$.

方法二：也可以延长 AC 到 D，使得 $CD=CQ$.

则易证△ADP≌△QBM.

∴$BM=PD=\sqrt{2}CD=\sqrt{2}QC=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ$，

即 $PQ=\sqrt{2}MB$.



4．在等边△ABC中，

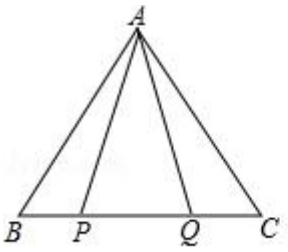


图1

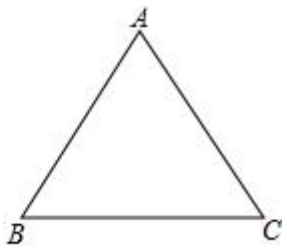


图2

（1）如图1，P，Q是BC边上的两点，$AP=AQ$，$\angle BAP=20°$，求$\angle AQB$的度数；

（2）点P，Q是BC边上的两个动点（不与点B，C重合），点P在点Q的左侧，且$AP=AQ$，点Q关于直线AC的对称点为M，连接AM，PM.

①依题意将图2补全；

②小茹通过观察、实验提出猜想：在点P，Q运动的过程中，始终有$PA=PM$，小茹把这个猜想与同学们进行交流，通过讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

想法1：要证明$PA=PM$，只需证△APM是等边三角形；

想法2：在BA上取一点N，使得$BN=BP$，要证明$PA=PM$，只需证△ANP≌△PCM；

想法3：将线段BP绕点B顺时针旋转60°，得到线段BK，要证$PA=PM$，只需证$PA=CK$，$PM=CK$…

请你参考上面的想法，帮助小茹证明$PA=PM$（一种方法即可）.

【解答】解：（1）∵$AP=AQ$，

∴$\angle APQ=\angle AQP$，

∴$\angle APB=\angle AQC$，

∵△ABC是等边三角形，

∴$\angle B=\angle C=60°$，

∴$\angle BAP=\angle CAQ=20°$，

∴$\angle AQB=\angle APQ=\angle BAP+\angle B=80°$；

（2）如图2，∵$AP=AQ$，

∴$\angle APQ=\angle AQP$，

∴$\angle APB=\angle AQC$，

∵△ABC是等边三角形，

∴$\angle B=\angle C=60°$，

∴$\angle BAP=\angle CAQ$，（将线段BP绕点B顺时针旋转60°，得到线段BK，要证$PA=PM$，

只需证 $PA=CK$，$PM=CK$…

请你参考上面的想法，帮助小茹证明 $PA=PM$）

∵点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M，

∴$AQ=AM$，$\angle QAC=\angle MAC$，

∴$\angle MAC=\angle BAP$，

∴$\angle BAP+\angle PAC=\angle MAC+\angle CAP=60°$，

∴$\angle PAM=60°$，

∵$AP=AQ$，

∴$AP=AM$，

∴$\triangle APM$ 是等边三角形，

∴$AP=PM$．证明$\triangle ABP\cong\triangle ACM\cong\triangle BCK$

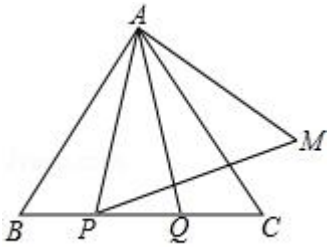


图2

5．在正方形 $ABCD$ 中，BD 是一条对角线，点 P 在射线 CD 上（与点 C、D 不重合），连接 AP，平移$\triangle ADP$，使点 D 移动到点 C，得到$\triangle BCQ$，过点 Q 作 $QH\perp BD$ 于 H，连接 AH，PH．

（1）若点 P 在线段 CD 上，如图 1．

①依题意补全图 1；

②判断 AH 与 PH 的数量关系与位置关系并加以证明；

（2）若点 P 在线段 CD 的延长线上，且$\angle AHQ=152°$，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，请写出求 DP 长的思路．（可以不写出计算结果）

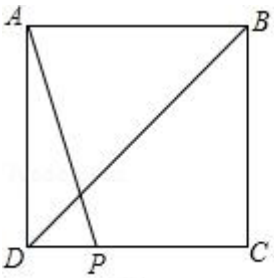
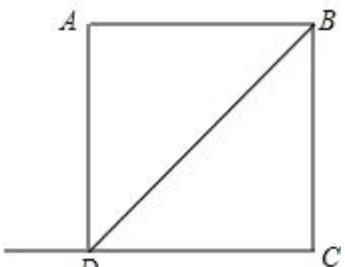


图1



备用图

【解答】解：（1）①如图 1；

②解法一：如图 1，连接 CH，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$QH \perp BD$，

∴$\angle HDQ=45°$，

∴$\triangle DHQ$ 是等腰直角三角形．

∵$DP=CQ$，

在$\triangle HDP$ 与$\triangle HQC$ 中．

$$\because \begin{cases} DH=QH \\ \angle HDP=\angle HQC, \\ DP=QC \end{cases}$$

∴$\triangle HDP \cong \triangle HQC$（$SAS$），

∴$PH=CH$，$\angle HPC=\angle HCP$．

∵BD 是正方形 $ABCD$ 的对称轴，

∴$AH=CH$，$\angle DAH=\angle HCP$，

∵$\angle HPC+\angle DPH=180°$，

∴$\angle DAH+\angle DPH=180°$，

∴$\angle ADP+\angle AHP=180°$，

∴$\angle AHP=180°-\angle ADP=90°$，

∴$AH=PH$，$AH \perp PH$．

解法二：如图 1，连接 CH，

∵$QH \perp BD$，

∴$\angle QHB=\angle BCQ=90°$，

∴B、H、C、Q 四点共圆，

∴$\angle DHC=\angle BQC$，

由正方形的性质可知$\angle DHC=\angle AHD$，

由平移性质可知$\angle BQC=\angle APD$，

∴$\angle AHD=\angle APD$，

∴A、H、P、D 四点共圆，

∴$\angle PAH=\angle PDH=45°$，$\angle AHP=\angle ADP=90°$，

∴$\triangle HAP$ 是等腰直角三角形，

∴$AH=PH$，$AH \perp PH$．

（2）解法一：如图 2，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$QH \perp BD$，

∴$\angle HDQ=45°$，

∴△DHQ 是等腰直角三角形.

∵△BCQ 由△ADP 平移而成，

∴$PD=CQ$.

作 $HR \perp PC$ 于点 R，

∵$\angle AHQ=152°$，

∴$\angle AHB=62°$，

∴$\angle DAH=17°$.

设 $DP=x$，则 $DR=HR=RQ=\frac{1-x}{2}$.

∵$\tan 17°=\frac{HR}{CR}$，即 $\tan 17°=\frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1+x}{2}}$，

∴$x=\frac{1-\tan 17°}{1+\tan 17°}$.

解法二：

由（1）②可知$\angle AHP=90°$，

∴$\angle AHP=\angle ADP=90°$，

∴A、H、D、P 四点共圆，

又$\angle AHQ=152°$，$\angle BHQ=90°$，

∴$\angle AHB=152°-90°=62°$，

由圆的性质可知$\angle APD=\angle AHB=62°$，

在 Rt△APD 中，$\angle PAD=90°-62°=28°$，

∴$PD=AD \cdot \tan 28°=\tan 28°$.

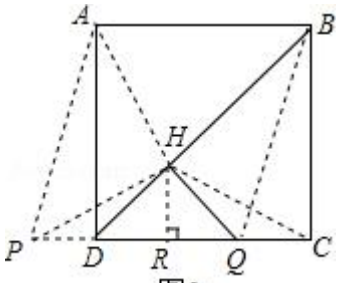


图2

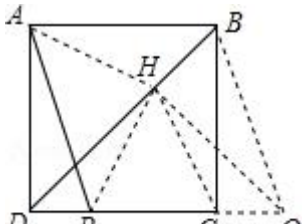


图1

6．在正方形 $ABCD$ 外侧作直线 AP，点 B 关于直线 AP 的对称点为 E，连接 BE，DE，其中 DE 交直线 AP 于点 F.

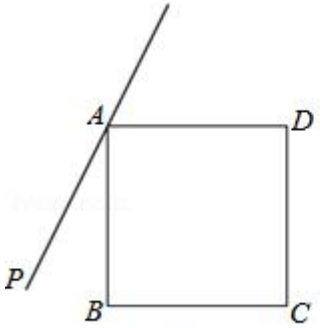


图1

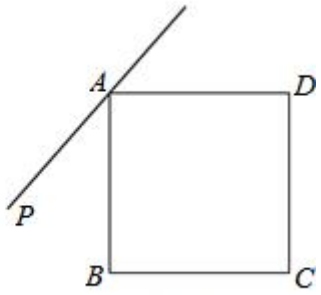


图2

（1）依题意补全图 1；

（2）若 $\angle PAB=20°$，求 $\angle ADF$ 的度数；

（3）如图 2，若 $45°<\angle PAB<90°$，用等式表示线段 AB，FE，FD 之间的数量关系，并证明.

【解答】解：（1）如图 1 所示：

（2）如图 2，连接 AE，

则 $\angle PAB=\angle PAE=20°$，$AE=AB=AD$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle BAD=90°$，

∴ $\angle EAP=\angle BAP=20°$，

∴ $\angle EAD=130°$，

∴$\angle ADF=\frac{180^\circ-130^\circ}{2}=25^\circ$；

（3）如图 3，连接 AE、BF、BD，

由轴对称的性质可得：$EF=BF$，$AE=AB=AD$，

$\angle ABF=\angle AEF=\angle ADF$，

∴$\angle BFD=\angle BAD=90^\circ$，

∴$BF^2+FD^2=BD^2$，

∴$EF^2+FD^2=2AB^2$.

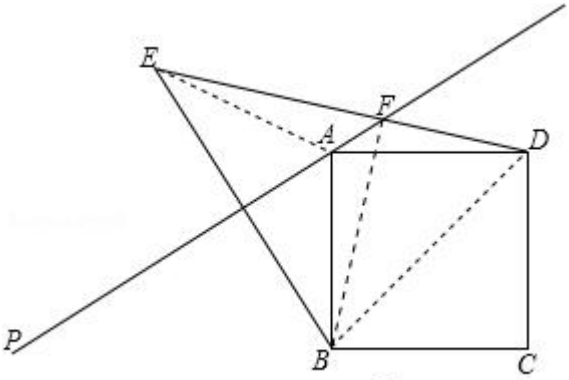


图3

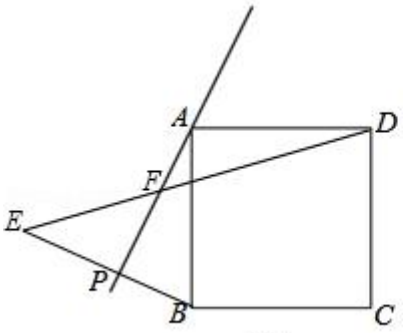


图1

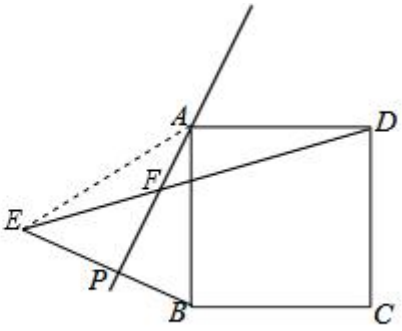


图2

7．在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$（$0^\circ<\alpha<60^\circ$），将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60°得到线段 BD.

（1）如图 1，直接写出$\angle ABD$ 的大小（用含α的式子表示）；

（2）如图 2，$\angle BCE=150^\circ$，$\angle ABE=60^\circ$，判断△ABE 的形状并加以证明；

（3）在（2）的条件下，连接 DE，若$\angle DEC=45^\circ$，求α的值.

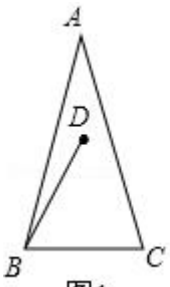


图1

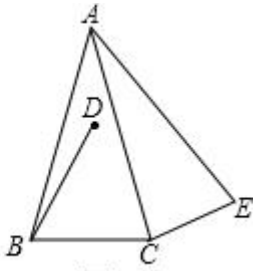


图2

【解答】（1）解：∵$AB=AC$，$\angle A=\alpha$，

∴$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A$，

∴$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$，

∵$\angle ABD=\angle ABC-\angle DBC$，$\angle DBC=60^\circ$，

即$\angle ABD=30^\circ-\frac{1}{2}\alpha$；

（2）△ABE 是等边三角形，

证明：连接 AD，CD，ED，

∵线段 BC 绕 B 逆时针旋转 60°得到线段 BD，

则 $BC=BD$，$\angle DBC=60^\circ$，

∵$\angle ABE=60^\circ$，

∴$\angle ABD=60^\circ-\angle DBE=\angle EBC=30^\circ-\frac{1}{2}\alpha$，且△$BCD$ 为等边三角形，

在△ABD 与△ACD 中

$$\begin{cases}AB=AC\\AD=AD\\BD=CD\end{cases}$$

∴△ABD≌△ACD（SSS），

∴$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha$，

∵$\angle BCE=150^\circ$，

∴$\angle BEC=180^\circ-(30^\circ-\frac{1}{2}\alpha)-150^\circ=\frac{1}{2}\alpha=\angle BAD$，

在△ABD 和△EBC 中

$$\begin{cases}\angle BEC=\angle BAD\\\angle EBC=\angle ABD\\BC=BD\end{cases}$$

∴△ABD≌△EBC（AAS），

∴$AB=BE$，

∴△ABE 是等边三角形；

（3）解：∵$\angle BCD=60°$，$\angle BCE=150°$，

∴$\angle DCE=150°-60°=90°$，

∵$\angle DEC=45°$，

∴△DEC 为等腰直角三角形，

∴$DC=CE=BC$，

∵$\angle BCE=150°$，

∴$\angle EBC=\frac{1}{2}(180°-150°)=15°$，

∵$\angle EBC=30°-\frac{1}{2}\alpha=15°$，

∴$\alpha=30°$．

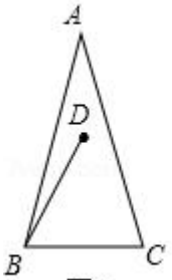


图1

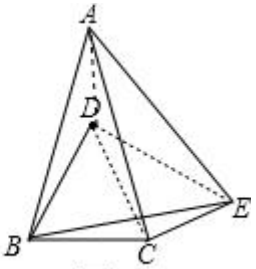


图2

8．在△ABC 中，$BA=BC$，$\angle BAC=\alpha$，M 是 AC 的中点，P 是线段 BM 上的动点，将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 2α得到线段 PQ．

（1）若$\alpha=60°$且点 P 与点 M 重合（如图 1），线段 CQ 的延长线交射线 BM 于点 D，请补全图形，并写出$\angle CDB$ 的度数；

（2）在图 2 中，点 P 不与点 B，M 重合，线段 CQ 的延长线于射线 BM 交于点 D，猜想 $\angle CDB$ 的大小（用含α的代数式表示），并加以证明；

（3）对于适当大小的α，当点 P 在线段 BM 上运动到某一位置（不与点 B，M 重合）时，能使得线段 CQ 的延长线与射线 BM 交于点 D，且 $PQ=QD$，请直接写出α的范围．

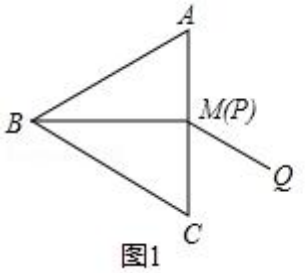


图1

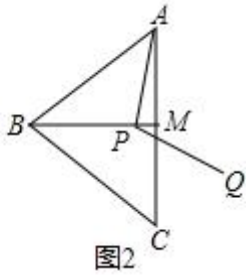


图2

【解答】解：（1）∵$BA=BC$，$\angle BAC=60°$，M 是 AC 的中点，

∴$BM\perp AC$，$AM=MC$，

∵将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 2α 得到线段 PQ，

∴$AM=MQ$，$\angle AMQ=120°$，

∴$CM=MQ$，$\angle CMQ=60°$，

∴△CMQ 是等边三角形，

∴$\angle ACQ=60°$，

∴$\angle CDB=30°$；

（2）如图 2，连接 PC，AD，

∵$AB=BC$，M 是 AC 的中点，

∴$BM\perp AC$，

即 BD 为 AC 的垂直平分线，

∴$AD=CD$，$AP=PC$，$PD=PD$，

在△APD 与△CPD 中，

$$\because \begin{cases} AD=CD \\ PD=PD, \\ PA=PC \end{cases}$$

∴△APD≌△CPD（SSS），

∴$\angle ADB=\angle CDB$，$\angle PAD=\angle PCD$，

又∵$PQ=PA$，

∴$PQ=PC$，$\angle ADC=2\angle 1$，$\angle 4=\angle PCQ=\angle PAD$，

∴$\angle PAD+\angle PQD=\angle 4+\angle PQD=180°$，

∴$\angle APQ+\angle ADC=360°-(\angle PAD+\angle PQD)=180°$，

∴$\angle ADC=180°-\angle APQ=180°-2\alpha$，

∴$2\angle CDB=180°-2\alpha$，

∴∠CDB＝90°﹣α；

（3）如图 1，延长 BM，CQ 交于点 D，连接 AD，

∵∠CDB＝90°﹣α，且 PQ＝QD，

∴∠PAD＝∠PCQ＝∠PQC＝2∠CDB＝180°﹣2α，

∵点 P 不与点 B，M 重合，

∴∠BAD＞∠PAD＞∠MAD，

∵点 P 在线段 BM 上运动，∠PAD 最大为 2α，∠PAD 最小等于α，

∴2α＞180°﹣2α＞α，

∴45°＜α＜60°．

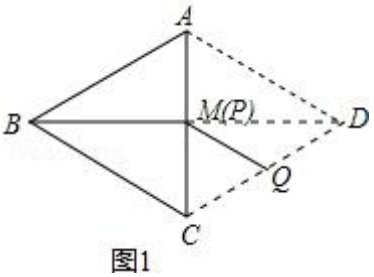


图1

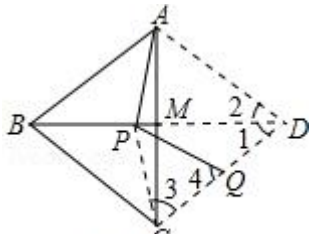


图2

9．在▱ $ABCD$ 中，∠BAD 的平分线交直线 BC 于点 E，交直线 DC 于点 F．

（1）在图 1 中证明 CE＝CF；

（2）若∠ABC＝90°，G 是 EF 的中点（如图 2），直接写出∠BDG 的度数；

（3）若∠ABC＝120°，FG∥CE，FG＝CE，分别连接 DB、DG（如图 3），求∠BDG 的度数．

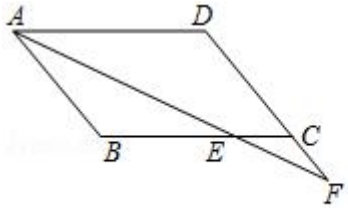


图 1

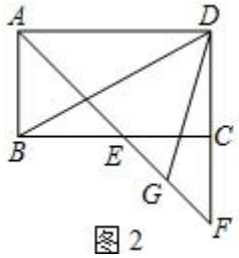


图 2

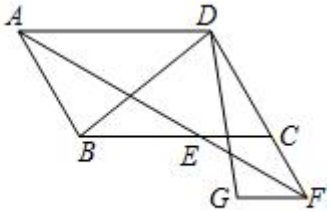


图 3

【解答】（1）证明：如图 1，

∵AF 平分∠BAD，

∴∠BAF＝∠DAF，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴AD∥BC，AB∥CD，

∴∠DAF＝∠CEF，∠BAF＝∠F，

∴∠CEF＝∠F.

∴CE＝CF.

（2）解：连接 GC、BG，

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∠ABC＝90°，

∴四边形 $ABCD$ 为矩形，

∵AF 平分∠BAD，

∴∠DAF＝∠BAF＝45°，

∵∠DCB＝90°，DF∥AB，

∴∠DFA＝45°，∠ECF＝90°

∴△ECF 为等腰直角三角形，

∵G 为 EF 中点，

∴EG＝CG＝FG，CG⊥EF，

∵△ABE 为等腰直角三角形，AB＝DC，

∴BE＝DC，

∵∠CEF＝∠GCF＝45°，

∴∠BEG＝∠DCG＝135°

在△BEG 与△DCG 中，

∵$\begin{cases} EG=CG \\ \angle BEG=\angle DCG, \\ BE=DC \end{cases}$

∴△BEG≌△DCG，

∴BG＝DG，

∵CG⊥EF，

∴∠DGC+∠DGA＝90°，

又∵∠DGC＝∠BGA，

∴∠*BGA*+∠*DGA*＝90°，

∴△*DGB* 为等腰直角三角形，

∴∠*BDG*＝45°．

（3）解：延长 *AB*、*FG* 交于 *H*，连接 *HD*．

∵*AD*∥*GF*，*AB*∥*DF*，

∴四边形 *AHFD* 为平行四边形

∵∠*ABC*＝120°，*AF* 平分∠*BAD*

∴∠*DAF*＝30°，∠*ADC*＝120°，∠*DFA*＝30°

∴△*DAF* 为等腰三角形

∴*AD*＝*DF*，

∴*CE*＝*CF*，

∴平行四边形 *AHFD* 为菱形

∴△*ADH*，△*DHF* 为全等的等边三角形

∴*DH*＝*DF*，∠*BHD*＝∠*GFD*＝60°

∵*FG*＝*CE*，*CE*＝*CF*，*CF*＝*BH*，

∴*BH*＝*GF*

在△*BHD* 与△*GFD* 中，

$$\because \begin{cases} DH=DF \\ \angle BHD=\angle GFD, \\ BH=GF \end{cases}$$

∴△*BHD*≌△*GFD*，

∴∠*BDH*＝∠*GDF*

∴∠*BDG*＝∠*BDH*+∠*HDG*＝∠*GDF*+∠*HDG*＝60°

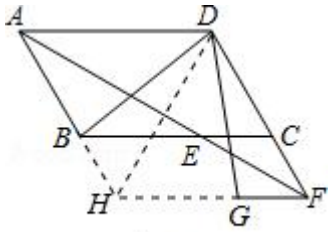


图 3

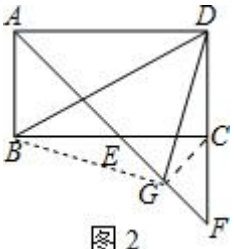


图 2

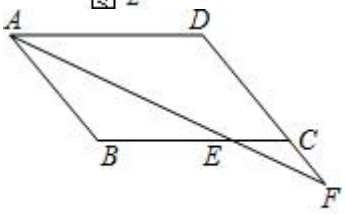


图 1

10．问题：已知△*ABC* 中，∠*BAC*＝2∠*ACB*，点 *D* 是△*ABC* 内的一点，且 *AD*＝*CD*，*BD*＝*BA*．探究∠*DBC* 与∠*ABC* 度数的比值．

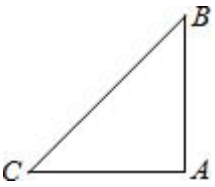
请你完成下列探究过程：

先将图形特殊化，得出猜想，再对一般情况进行分析并加以证明．

（1）当∠*BAC*＝90°时，依问题中的条件补全右图；

观察图形，*AB* 与 *AC* 的数量关系为__相等__；当推出∠*DAC*＝15°时，可进一步推出∠*DBC* 的度数为__15°__；可得到∠*DBC* 与∠*ABC* 度数的比值为__1：3__；

（2）当∠*BAC*＜90°时，请你画出图形，研究∠*DBC* 与∠*ABC* 度数的比值是否与（1）中的结论相同，写出你的猜想并加以证明．



【解答】解：（1）①当∠*BAC*＝90°时，

∵∠*BAC*＝2∠*ACB*，

∴∠*ACB*＝45°，

在△*ABC* 中，∠*ABC*＝180°－∠*ACB*－∠*BAC*＝45°，

∴∠*ACB*＝∠*ABC*，

∴*AB*＝*AC*（等角对等边）；

②当∠*DAC*＝15°时，

∠*DAB*＝90°－15°＝75°，

∵*BD*＝*BA*，

∴∠BAD＝∠BDA＝75°，

∴∠DBA＝180°﹣75°﹣75°＝30°，

∴∠DBC＝45°﹣30°＝15°，即∠DBC＝15°，

∴∠DBC 的度数为 15°；

③∵∠DBC＝15°，∠ABC＝45°，

∴∠DBC＝15°，∠ABC＝45°，

∴∠DBC：∠ABC＝1：3，

∴∠DBC 与∠ABC 度数的比值为 1：3．

（2）猜想：∠DBC 与∠ABC 度数的比值与（1）中结论相同．

证明：如图 2，作∠KCA＝∠BAC，过 B 点作 BK∥AC 交 CK 于点 K，连接 DK．

∴四边形 $ABKC$ 是等腰梯形，

∴CK＝AB，

∵DC＝DA，

∴∠DCA＝∠DAC，

∵∠KCA＝∠BAC，

∴∠KCD＝∠3，

∴△KCD≌△BAD，

∴∠2＝∠4，KD＝BD，

∴KD＝BD＝BA＝KC．

∵BK∥AC，

∴∠ACB＝∠6，

∵∠BAC＝2∠ACB，且∠KCA＝∠BAC，

∴∠KCB＝∠ACB，

∴∠5＝∠ACB，

∴∠5＝∠6，

∴KC＝KB，

∴KD＝BD＝KB，

∴∠KBD＝60°，

∵∠ACB＝∠6＝60°﹣∠1，

∴∠BAC=2∠ACB=120°﹣2∠1，

∵∠1+（60°﹣∠1）+（120°﹣2∠1）+∠2=180°，

∴∠2=2∠1，

∴∠DBC 与∠ABC 度数的比值为 1：3．

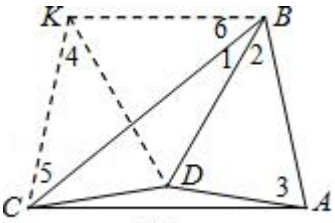


图 2

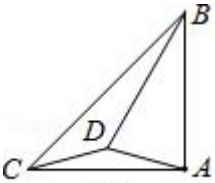


图 1

11．在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 C 作 $CE\perp CD$ 交 AD 于点 E，将线段 EC 绕点 E 逆时针旋转 90°得到线段 EF（如图 1）

（1）在图 1 中画图探究：

①当 P_1 为射线 CD 上任意一点（P_1 不与 C 重合）时，连接 EP_1；绕点 E 逆时针旋转 90°得到线段 EG_1．判断直线 FG_1 与直线 CD 的位置关系，并加以证明；

②当 P_2 为线段 DC 的延长线上任意一点时，连接 EP_2，将线段 EP_2 绕点 E 逆时针旋转 90°得到线段 EG_2．判断直线 G_1G_2 与直线 CD 的位置关系，画出图形并直接写出你的结论．

（2）若 $AD=6$，$\tan B=\frac{4}{3}$，$AE=1$，在①的条件下，设 $CP_1=x$，$S_{\triangle P1FG1}=y$，求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围．

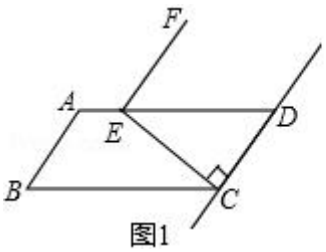


图1

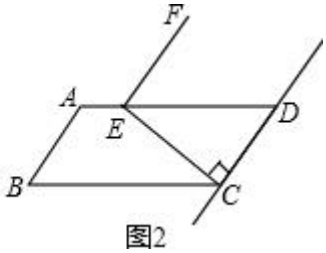


图2

【解答】解：（1）①直线 FG_1 与直线 CD 的位置关系为互相垂直．

证明：如图 1，设直线 FG_1 与直线 CD 的交点为 H．

∵线段 EC、EP_1 分别绕点 E 逆时针旋转 90°依次得到线段 EF、EG_1，

∴∠P_1EG_1=∠CEF=90°，$EG_1=EP_1$，$EF=EC$．

∵∠G_1EF＝90°﹣∠P_1EF，∠P_1EC＝90°﹣∠P_1EF，

∴∠G_1EF＝∠P_1EC.

∴△G_1EF≌△P_1EC.

∴∠G_1FE＝∠P_1CE.

∵EC⊥CD，

∴∠P_1CE＝90°，

∴∠G_1FE＝90 度.

∴∠EFH＝90 度.

∴∠FHC＝90 度.

∴FG_1⊥CD.

②按题目要求所画图形见图 1，

∵FG_1⊥CD，

∴直线 G_1G_2 与直线 CD 的位置关系为互相垂直.

（2）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴∠B＝∠ADC.

∵AD＝6，AE＝1，tan$B$＝$\frac{4}{3}$，

∴DE＝5，tan∠EDC＝tan$B$＝$\frac{4}{3}$.

可得 CE＝4.

由（1）可得四边形 $EFHC$ 为正方形.

∴CH＝CE＝4.

①如图 2，当 P_1 点在线段 CH 的延长线上时，

∵FG_1＝CP_1＝x，P_1H＝x﹣4，

∴$S_{△P1FG1}$＝$\frac{1}{2}$×FG_1×P_1H＝$\frac{x(x-4)}{2}$.

∴y＝$\frac{1}{2}x^2$﹣2x（x＞4）.

②如图 3，当 P_1 点在线段 CH 上（不与 C、H 两点重合）时，

∵FG_1＝CP_1＝x，P_1H＝4﹣x，

∴$S_{△P1FG1}$＝$\frac{1}{2}$×FG_1×P_1H＝$\frac{x(4-x)}{2}$.

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+2x$（$0<x<4$）.

③当 P_1 点与 H 点重合时，即 $x=4$ 时，$\triangle P_1FG_1$ 不存在.

综上所述，y 与 x 之间的函数关系式及自变量 x 的取值范围是 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$（$x>4$）或 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$（$0<x<4$）.

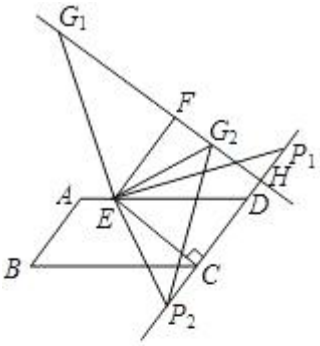


图 1

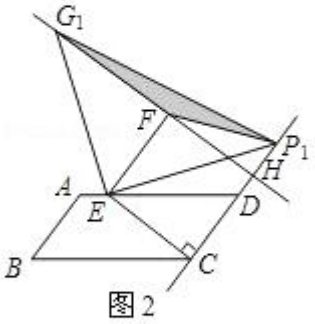


图 2

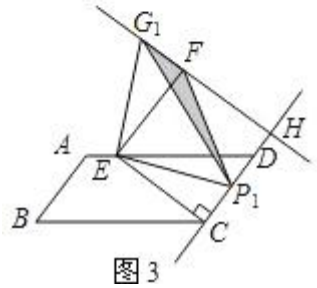


图 3

12．请阅读下列材料：

问题：如图 1，在菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 中，点 A，B，E 在同一条直线上，P 是线段 DF 的中点，连接 PG，PC．若 $\angle ABC=\angle BEF=60°$，探究 PG 与 PC 的位置关系及 $\frac{PG}{PC}$ 的值.

小聪同学的思路是：延长 GP 交 DC 于点 H，构造全等三角形，经过推理使问题得到解决.请你参考小聪同学的思路，探究并解决下列问题：

（1）写出上面问题中线段 PG 与 PC 的位置关系及$\frac{PG}{PC}$的值；

（2）将图 1 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，使菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一条直线上，原问题中的其他条件不变（如图 2）．你在（1）中得到的两个结论是否发生变化？写出你的猜想并加以证明；

（3）若图 1 中$\angle ABC=\angle BEF=2\alpha$（$0°<\alpha<90°$），将菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转任意角度，原问题中的其他条件不变，请你直接写出$\frac{PG}{PC}$的值（用含α的式子表示）．

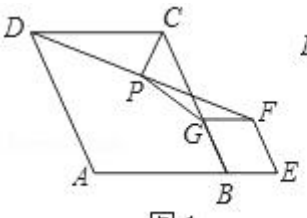


图 1

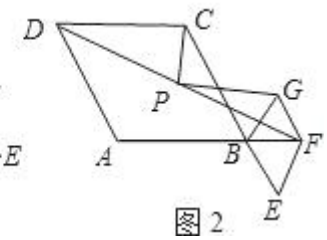


图 2

【解答】解：（1）∵$CD∥GF$，$\angle PDH=\angle PFG$，$\angle DHP=\angle PGF$，$DP=PF$，

∴$\triangle DPH\cong\triangle FGP$，

∴$PH=PG$，$DH=GF$，

∵$CD=BC$，$GF=GB=DH$，

∴$CH=CG$，

∴$CP\perp HG$，$\angle ABC=60°$，

∴$\angle DCG=120°$，

∴$\angle PCG=60°$，

∴PG：$PC=\tan 60°=\sqrt{3}$，

∴线段 PG 与 PC 的位置关系是 $PG\perp PC$，$\frac{PG}{PC}=\sqrt{3}$；

（2）猜想：（1）中的结论没有发生变化．

证明：如图 2，延长 GP 交 AD 于点 H，连接 CH、CG．

∵P 是线段 DF 的中点，

∴$FP=DP$，

∵$AD∥GF$，

∴$\angle HDP=\angle GFP$，

∵$\angle GPF=\angle HPD$，

∴△*GFP*≌△*HDP*（*ASA*），

∴*GP*＝*HP*，*GF*＝*HD*，

∵四边形 *ABCD* 是菱形，

∴*CD*＝*CB*，∠*HDC*＝∠*ABC*＝60°，

∵∠*ABC*＝∠*BEF*＝60°，菱形 *BEFG* 的对角线 *BF* 恰好与菱形 *ABCD* 的边 *AB* 在同一条直线上，

∴∠*GBF*＝60°，

∴∠*HDC*＝∠*GBF*，

∵四边形 *BEFG* 是菱形，

∴*GF*＝*GB*，

∴*HD*＝*GB*，

∴△*HDC*≌△*GBC*，

∴*CH*＝*CG*，∠*HCD*＝∠*GCB*

∴*PG*⊥*PC*（到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上）

∵∠*ABC*＝60°

∴∠*DCB*＝∠*HCD*+∠*HCB*＝120°

∵∠*HCG*＝∠*HCB*+∠*GCB*

∴∠*HCG*＝120°

∴∠*GCP*＝60°

∴$\frac{PG}{PC}$＝tan∠*GCP*＝tan60°＝$\sqrt{3}$；

（3）∵∠*ABC*＝∠*BEF*＝2α（0°＜α＜90°），

∴∠*PCG*＝90°﹣α，

由（1）可知：*PG*：*PC*＝tan（90°﹣α），

∴$\frac{PG}{PC}$＝tan（90°﹣α）.

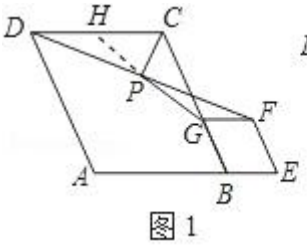


图 1

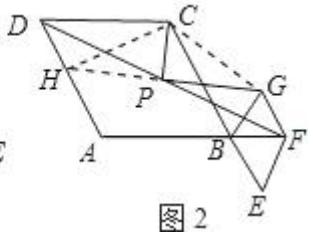


图 2