2008～2019 北京中考数学分类汇编(探究性试题之几何篇)

一．解答题（共 7 小题）

1．已知等边三角形纸片 ABC 的边长为 8，D 为 AB 边上的点，过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交 AC 于点 G．$DE \perp BC$ 于点 E，过点 G 作 $GF \perp BC$ 于点 F，把三角形纸片 ABC 分别沿 DG，DE，GF 按图 1 所示方式折叠，点 A，B，C 分别落在点 A'，B'，C' 处．若点 A'，B'，C' 在矩形 $DEFG$ 内或其边上，且互不重合，此时我们称△$A'B'C'$（即图中阴影部分）为“重叠三角形”．

（1）若把三角形纸片 ABC 放在等边三角形网格中（图中每个小三角形都是边长为 1 的等边三角形），点 A，B，C，D 恰好落在网格图中的格点上．如图 2 所示，请直接写出此时重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积；

（2）实验探究：设 AD 的长为 m，若重叠三角形 $A'B'C'$ 存在．试用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积，并写出 m 的取值范围．（直接写出结果）

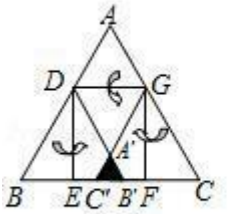


图 1

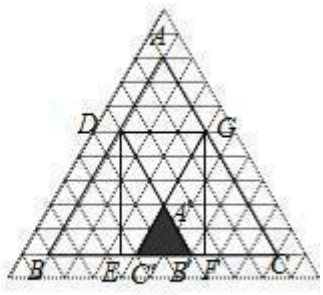


图 2

2．阅读下列材料：

小明遇到一个问题：5 个同样大小的正方形纸片排列形式如图 1 所示，将它们分割后拼接成一个新的正方形．他的做法是：按图 2 所示的方法分割后，将三角形纸片①绕 AB 的中点 O 旋转至三角形纸片②处，依此方法继续操作，即可拼接成一个新的正方形 $DEFG$．请你参考小明的做法解决下列问题：

（1）现有 5 个形状、大小相同的矩形纸片，排列形式如图 3 所示．请将其分割后拼接成一个平行四边形．要求：在图 3 中画出并指明拼接成的平行四边形（画出一个符合条件的平行四边形即可）；

（2）如图 4，在面积为 2 的平行四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，分别连接 AF、BG、CH、DE 得到一个新的平行四边形 $MNPQ$，请在图 4 中探究平行四边形 $MNPQ$ 面积的大小（画图并直接写出结果）．

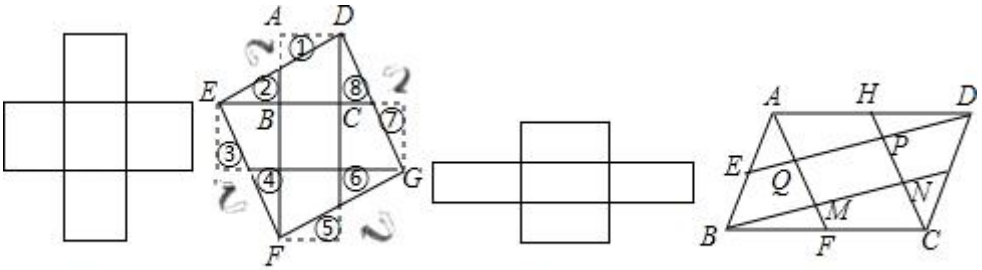


图1　图2　图3　图4

3．阅读下列材料：

小贝遇到一个有趣的问题：在矩形 $ABCD$ 中，$AD=8cm$，$AB=6cm$．现有一动点 P 按下列方式在矩形内运动：它从 A 点出发，沿着 AB 边夹角为 45°的方向作直线运动，每次碰到矩形的一边，就会改变运动方向，沿着与这条边夹角为 45°的方向作直线运动，并且它一直按照这种方式不停地运动，即当 P 点碰到 BC 边，沿着 BC 边夹角为 45°的方向作直线运动，当 P 点碰到 CD 边，再沿着与 CD 边夹角为 45°的方向作直线运动，…，如图 1 所示，

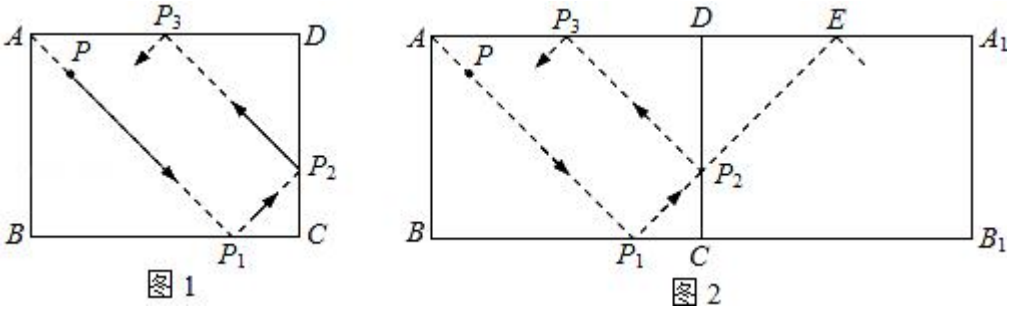


图 1　图 2

问 P 点第一次与 D 点重合前与边相碰几次，P 点第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是多少．小贝的思考是这样开始的：如图 2，将矩形 $ABCD$ 沿直线 CD 折叠，得到矩形 A_1B_1CD，由轴对称的知识，发现 $P_2P_3=P_2E$，$P_1A=P_1E$．

请你参考小贝的思路解决下列问题：

（1）P 点第一次与 D 点重合前与边相碰_____次；P 点从 A 点出发到第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是_____cm；

（2）近一步探究：改变矩形 $ABCD$ 中 AD、AB 的长，且满足 $AD>AB$，动点 P 从 A 点出发，按照阅读材料中动点的运动方式，并满足前后连续两次与边相碰的位置在矩形 $ABCD$ 相邻的两边上．若 P 点第一次与 B 点重合前与边相碰 7 次，则 AB：AD 的值为_____．

4．阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题，如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，对角线 AC，BD 相交于点 O．若梯形 $ABCD$ 的面积为 1，试求以 AC，BD，$AD+BC$ 的长度为三边长的三角形的面

积.

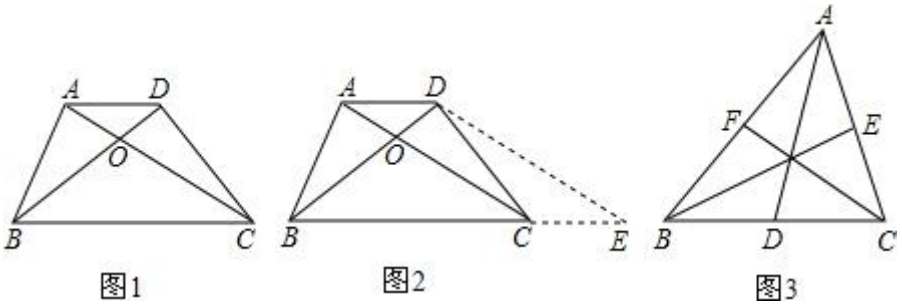


图1　　图2　　图3

小伟是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法移动这些分散的线段，构造一个三角形，再计算其面积即可．他先后尝试了翻折，旋转，平移的方法，发现通过平移可以解决这个问题.他的方法是过点 D 作 AC 的平行线交 BC 的延长线于点 E，得到的△BDE 即是以 AC，BD，$AD+BC$ 的长度为三边长的三角形（如图 2）.

参考小伟同学的思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3，△ABC 的三条中线分别为 AD，BE，CF.

（1）在图 3 中利用图形变换画出并指明以 AD，BE，CF 的长度为三边长的一个三角形（保留画图痕迹）；

（2）若△ABC 的面积为 1，则以 AD，BE，CF 的长度为三边长的三角形的面积等于_____.

5．操作与探究：

（1）对数轴上的点 P 进行如下操作：先把点 P 表示的数乘以$\frac{1}{3}$，再把所得数对应的点向右平移 1 个单位，得到点 P 的对应点 P' ．

点 A，B 在数轴上，对线段 AB 上的每个点进行上述操作后得到线段 $A'B'$ ，其中点 A，B 的对应点分别为 A' ，B' .如图 1，若点 A 表示的数是 -3，则点 A' 表示的数是_____；若点 B' 表示的数是 2，则点 B 表示的数是_____；已知线段 AB 上的点 E 经过上述操作后得到的对应点 E' 与点 E 重合，则点 E 表示的数是_____.

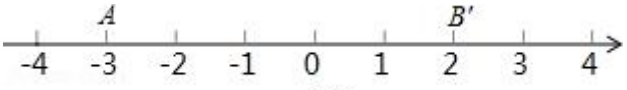


图1

（2）如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，对正方形 $ABCD$ 及其内部的每个点进行如下操作：把每个点的横、纵坐标都乘以同一个实数 a，将得到的点先向右平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位（$m>0$，$n>0$），得到正方形 $A'B'C'D'$ 及其内部的点，其中点 A，B 的对应点分别为 A' ，B' ．已知正方形 $ABCD$ 内部的一个点 F 经过上述操作后得到的对应点 F' 与点 F 重合，求点 F 的坐标.

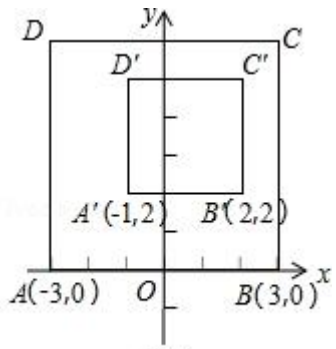


图2

6．阅读下面材料：

小明遇到这样一个问题：如图 1，在边长为 a（$a>2$）的正方形 $ABCD$ 各边上分别截取 $AE=BF=CG=DH=1$，当 $\angle AFQ=\angle BGM=\angle CHN=\angle DEP=45°$ 时，求正方形 $MNPQ$ 的面积．

小明发现，分别延长 QE，MF，NG，PH 交 FA，GB，HC，ED 的延长线于点 R，S，T，W，可得 $\triangle RQF$，$\triangle SMG$，$\triangle TNH$，$\triangle WPE$ 是四个全等的等腰直角三角形（如图 2）

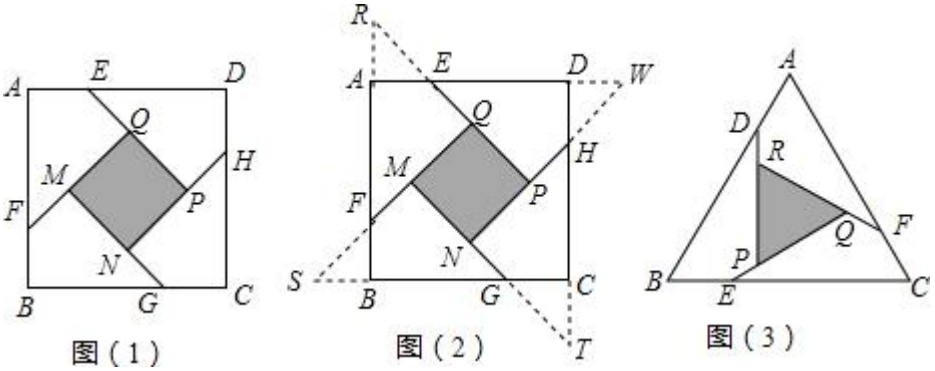
请回答：

（1）若将上述四个等腰直角三角形拼成一个新的正方形（无缝隙不重叠），则这个新正方形的边长为_____；

（2）求正方形 $MNPQ$ 的面积．

（3）参考小明思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在等边 $\triangle ABC$ 各边上分别截取 $AD=BE=CF$，再分别过点 D，E，F 作 BC，AC，AB 的垂线，得到等边 $\triangle RPQ$．若 $S_{\triangle RPQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 AD 的长为_____．



7．阅读下面材料：小腾遇到这样一个问题：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在线段 BC 上，$\angle BAD=75°$，$\angle CAD=30°$，$AD=2$，$BD=2DC$，求 AC 的长．

小腾发现，过点 C 作 $CE\parallel AB$，交 AD 的延长线于点 E，通过构造 $\triangle ACE$，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图 2）．

请回答：$\angle ACE$ 的度数为_____，AC 的长为_____.

参考小腾思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC=90°$，$\angle CAD=30°$，$\angle ADC=75°$，AC 与 BD 交于点 E，$AE=2$，$BE=2ED$，求 BC 的长.

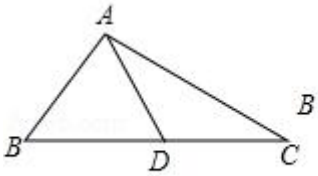


图1

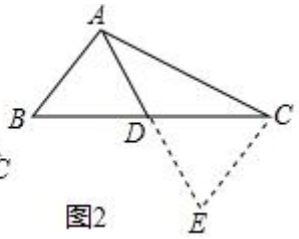


图2

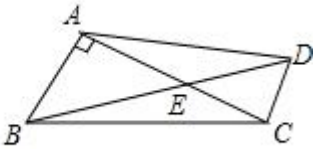


图3

2008～2019 北京中考数学分类汇编(探究性试题之几何篇)

参考答案与试题解析

一．解答题（共 7 小题）

1．已知等边三角形纸片 ABC 的边长为 8，D 为 AB 边上的点，过点 D 作 $DG∥BC$ 交 AC 于点 G．$DE⊥BC$ 于点 E，过点 G 作 $GF⊥BC$ 于点 F，把三角形纸片 ABC 分别沿 DG，DE，GF 按图 1 所示方式折叠，点 A，B，C 分别落在点 A'，B'，C' 处．若点 A'，B'，C' 在矩形 $DEFG$ 内或其边上，且互不重合，此时我们称△$A'B'C'$（即图中阴影部分）为“重叠三角形”．

（1）若把三角形纸片 ABC 放在等边三角形网格中（图中每个小三角形都是边长为 1 的等边三角形），点 A，B，C，D 恰好落在网格图中的格点上．如图 2 所示，请直接写出此时重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积；

（2）实验探究：设 AD 的长为 m，若重叠三角形 $A'B'C'$ 存在．试用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积，并写出 m 的取值范围．（直接写出结果）

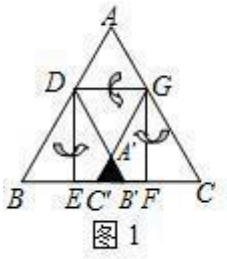


图 1

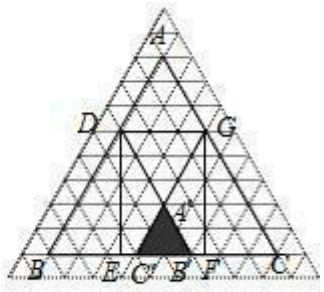


图 2

【解答】解：（1）∵每个小三角形的面积是$\frac{\sqrt{3}}{4}$

∴重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为$\sqrt{3}$；

（2）重叠的等边三角形 $A'B'C'$ 的边长$|8-m-m|=|8-2m|$，

根据 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 得：

面积是：$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|8-2m|^2=\sqrt{3}(4-m)^2$，

用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为$\sqrt{3}(4-m)^2$，

m 的取值范围为$\frac{8}{3}\leqslant m<4$．

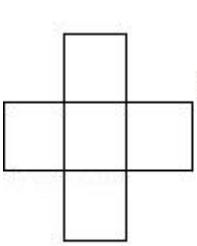
2．阅读下列材料：

小明遇到一个问题：5 个同样大小的正方形纸片排列形式如图 1 所示，将它们分割后拼接

成一个新的正方形．他的做法是：按图 2 所示的方法分割后，将三角形纸片①绕 AB 的中点 O 旋转至三角形纸片②处，依此方法继续操作，即可拼接成一个新的正方形 $DEFG$．请你参考小明的做法解决下列问题：

（1）现有 5 个形状、大小相同的矩形纸片，排列形式如图 3 所示．请将其分割后拼接成一个平行四边形．要求：在图 3 中画出并指明拼接成的平行四边形（画出一个符合条件的平行四边形即可）；

（2）如图 4，在面积为 2 的平行四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，分别连接 AF、BG、CH、DE 得到一个新的平行四边形 $MNPQ$，请在图 4 中探究平行四边形 $MNPQ$ 面积的大小（画图并直接写出结果）．


图1

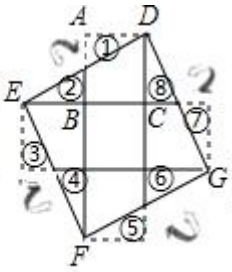
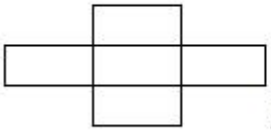


图2


图3

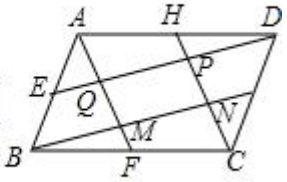


图4

【解答】解：

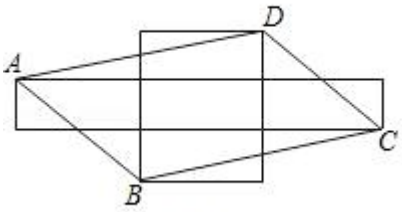


图3

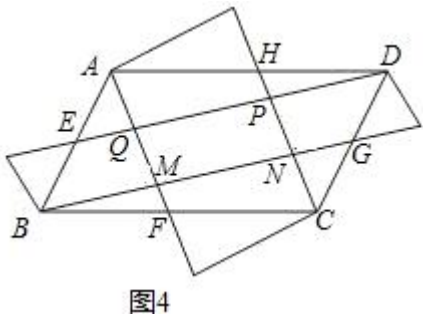


图4

（1）拼接成的平行四边形是平行四边形 $ABCD$（如图 3）．

（2）正确画出图形（如图 4）平行四边形 $MNPQ$ 的面积为$\frac{2}{5}$．

3．阅读下列材料：

小贝遇到一个有趣的问题：在矩形 $ABCD$ 中，$AD=8cm$，$AB=6cm$．现有一动点 P 按下列方式在矩形内运动：它从 A 点出发，沿着 AB 边夹角为 45° 的方向作直线运动，每次碰到矩形的一边，就会改变运动方向，沿着与这条边夹角为 45° 的方向作直线运动，并且它一直按照这种方式不停地运动，即当 P 点碰到 BC 边，沿着 BC 边夹角为 45° 的方向作直线运动，当 P 点碰到 CD 边，再沿着与 CD 边夹角为 45° 的方向作直线运动，…，如图 1 所示，

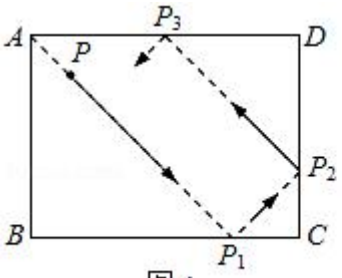


图 1

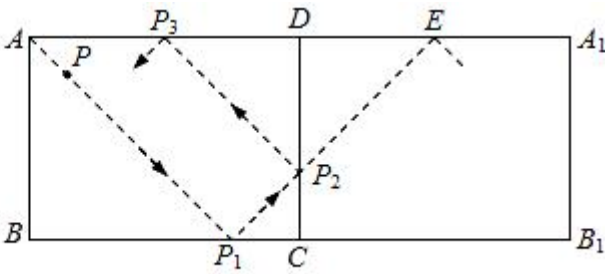


图 2

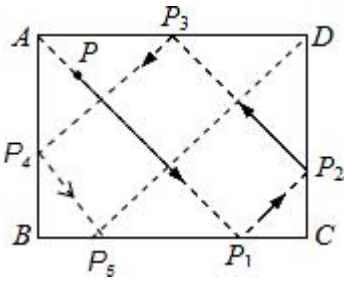
问 P 点第一次与 D 点重合前与边相碰几次，P 点第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是多少．小贝的思考是这样开始的：如图 2，将矩形 $ABCD$ 沿直线 CD 折叠，得到矩形 A_1B_1CD，由轴对称的知识，发现 $P_2P_3=P_2E$，$P_1A=P_1E$．

请你参考小贝的思路解决下列问题：

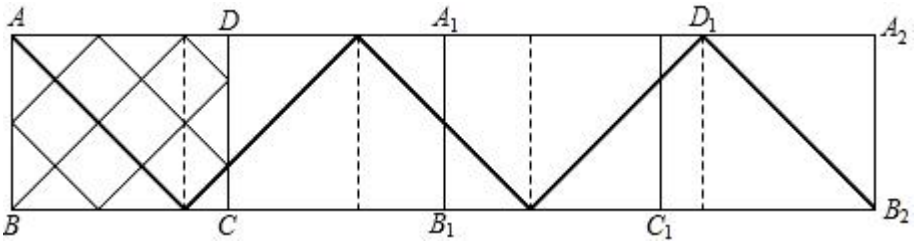
（1）P 点第一次与 D 点重合前与边相碰__5__次；P 点从 A 点出发到第一次与 D 点重合时所经过的路径的总长是__$24\sqrt{2}$__cm；

（2）近一步探究：改变矩形 $ABCD$ 中 AD、AB 的长，且满足 $AD>AB$，动点 P 从 A 点出发，按照阅读材料中动点的运动方式，并满足前后连续两次与边相碰的位置在矩形 $ABCD$ 相邻的两边上．若 P 点第一次与 B 点重合前与边相碰 7 次，则 AB：AD 的值为__4：5__．

【解答】解：（1）5；



（2）$24\sqrt{2}$；解题思路示意图：

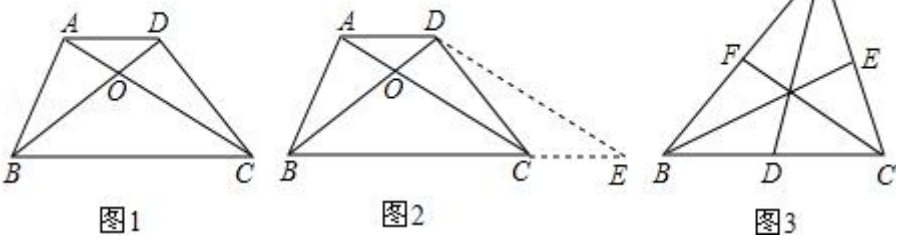


（2）AB：AD=4：5．

4．阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题，如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，对角线 AC，BD 相交于点 O．若梯形 $ABCD$ 的面积为 1，试求以 AC，BD，$AD+BC$ 的长度为三边长的三角形的面

积.



小伟是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法移动这些分散的线段，构造一个三角形，再计算其面积即可．他先后尝试了翻折，旋转，平移的方法，发现通过平移可以解决这个问题.他的方法是过点 D 作 AC 的平行线交 BC 的延长线于点 E，得到的△BDE 即是以 AC，BD，$AD+BC$ 的长度为三边长的三角形（如图 2）.

参考小伟同学的思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3，△ABC 的三条中线分别为 AD，BE，CF.

（1）在图 3 中利用图形变换画出并指明以 AD，BE，CF 的长度为三边长的一个三角形（保留画图痕迹）；

（2）若△ABC 的面积为 1，则以 AD，BE，CF 的长度为三边长的三角形的面积等于__$\frac{3}{4}$__.

【解答】解：△BDE 的面积等于 1.

（1）如图．以 AD、BE、CF 的长度为三边长的一个三角形是△CFP.

（2）平移 AF 到 PE，可得 AF∥PE，AF＝PE，

∴四边形 $AFEP$ 为平行四边形，

∴AE 与 PF 互相平分，即 M 为 PF 的中点，

又∵AP∥FN，F 为 AB 的中点，

∴N 为 PC 的中点，

∴E 为△PFC 各边中线的交点，

∴△PEC 的面积为△PFC 面积的$\frac{1}{3}$

连接 DE，可知 DE 与 PE 在一条直线上

∴△EDC 的面积是△ABC 面积的$\frac{1}{4}$

所以△PFC 的面积是 $1\times\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{4}$

∴以 AD、BE、CF 的长度为三边长的三角形的面积等于$\frac{3}{4}$.

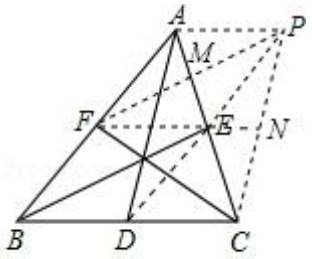


图3

5．操作与探究：

（1）对数轴上的点 P 进行如下操作：先把点 P 表示的数乘以$\frac{1}{3}$，再把所得数对应的点向右平移 1 个单位，得到点 P 的对应点 P'．

点 A，B 在数轴上，对线段 AB 上的每个点进行上述操作后得到线段 $A'B'$，其中点 A，B 的对应点分别为 A'，B'．如图 1，若点 A 表示的数是 -3，则点 A' 表示的数是 0；若点 B' 表示的数是 2，则点 B 表示的数是 3；已知线段 AB 上的点 E 经过上述操作后得到的对应点 E' 与点 E 重合，则点 E 表示的数是 $\frac{3}{2}$.

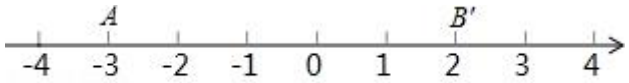


图1

（2）如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，对正方形 $ABCD$ 及其内部的每个点进行如下操作：把每个点的横、纵坐标都乘以同一个实数 a，将得到的点先向右平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位（$m>0$，$n>0$），得到正方形 $A'B'C'D'$ 及其内部的点，其中点 A，B 的对应点分别为 A'，B'．已知正方形 $ABCD$ 内部的一个点 F 经过上述操作后得到的对应点 F' 与点 F 重合，求点 F 的坐标.

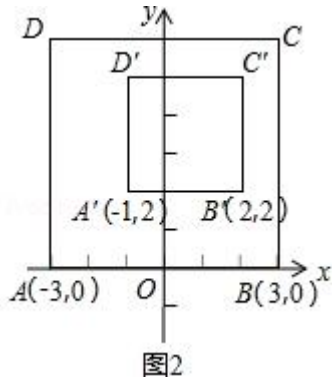


图2

【解答】解：（1）点 A'：$-3\times\frac{1}{3}+1=-1+1=0$，

设点 B 表示的数为 a，则$\frac{1}{3}a+1=2$，

解得 $a=3$，

设点 E 表示的数为 b，则$\frac{1}{3}b+1=b$，

解得 $b=\frac{3}{2}$；

故答案为：0，3，$\frac{3}{2}$；

（2）根据题意得，$\begin{cases}-3a+m=-1\\3a+m=2\\0\cdot a+n=2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\m=\frac{1}{2}\\n=2\end{cases}$，

设点 F 的坐标为（x，y），

∵对应点 F' 与点 F 重合，

∴$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x$，$\frac{1}{2}y+2=y$，

解得 $x=1$，$y=4$，

所以，点 F 的坐标为（1，4）.

6．阅读下面材料：

小明遇到这样一个问题：如图 1，在边长为 a（$a>2$）的正方形 $ABCD$ 各边上分别截取 $AE=BF=CG=DH=1$，当$\angle AFQ=\angle BGM=\angle CHN=\angle DEP=45°$ 时，求正方形 $MNPQ$ 的面积.

小明发现，分别延长 QE，MF，NG，PH 交 FA，GB，HC，ED 的延长线于点 R，S，T，W，可得$\triangle RQF$，$\triangle SMG$，$\triangle TNH$，$\triangle WPE$ 是四个全等的等腰直角三角形（如图 2）

请回答：

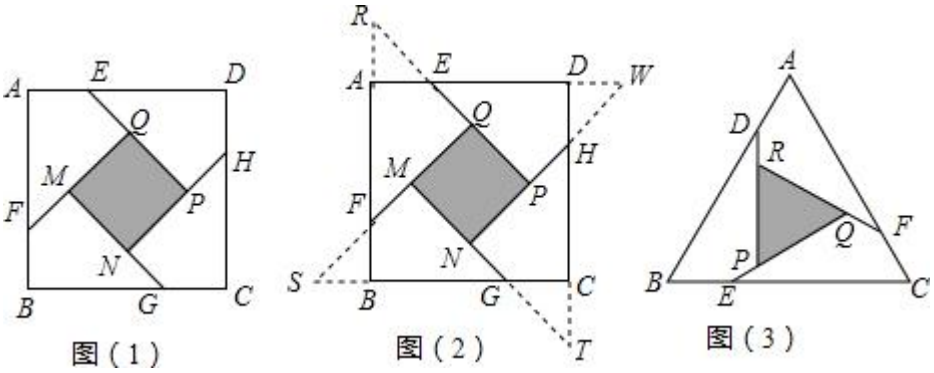
（1）若将上述四个等腰直角三角形拼成一个新的正方形（无缝隙不重叠），则这个新正方形的边长为__a__；

（2）求正方形 $MNPQ$ 的面积.

（3）参考小明思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在等边$\triangle ABC$ 各边上分别截取 $AD=BE=CF$，再分别过点 D，E，F 作 BC，AC，

AB 的垂线，得到等边△RPQ．若 $S_{\triangle RPQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 AD 的长为____$\frac{2}{3}$____．



【解答】解：（1）四个等腰直角三角形的斜边长为 a，则斜边上的高为$\frac{1}{2}a$，

每个等腰直角三角形的面积为：$\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}a^2$，

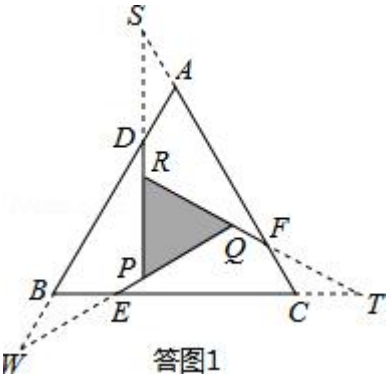
则拼成的新正方形面积为：$4\times\frac{1}{4}a^2=a^2$，即与原正方形 $ABCD$ 面积相等，

∴这个新正方形的边长为 a；

（2）∵四个等腰直角三角形的面积和为 a^2，正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2，

∴$S_{\text{正方形}MNPQ}=S_{\triangle ARE}+S_{\triangle DWH}+S_{\triangle GCT}+S_{\triangle SBF}=4S_{\triangle ARE}=4\times\frac{1}{2}\times1^2=2$；

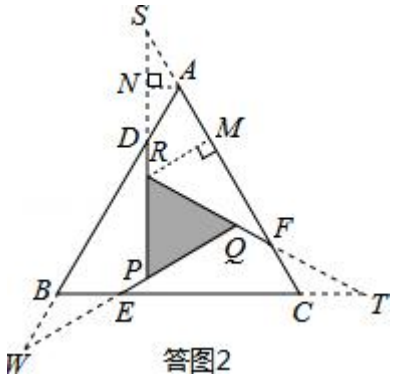
（3）如答图 1 所示，分别延长 RD，QF，PE，交 FA，EC，DB 的延长线于点 S，T，W．



由题意易得：△RSF，△QET，△PDW 均为底角是 30° 的等腰三角形，其底边长均等于△ABC 的边长．

不妨设等边三角形边长为 a，则 $SF=AC=a$．

如答图 2 所示，过点 R 作 $RM\perp SF$ 于点 M，则 $MF=\frac{1}{2}SF=\frac{1}{2}a$，



答图2

在 Rt△RMF 中，$RM=MF\cdot\tan30^\circ=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，

$\therefore S_{\triangle RSF}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.

过点 A 作 $AN\perp SD$ 于点 N，设 $AD=AS=x$，

则 $AN=AD\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}x$，$SD=2ND=2AD\cos30^\circ=\sqrt{3}x$，

$\therefore S_{\triangle ADS}=\frac{1}{2}SD\cdot AN=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

∵三个等腰三角形△RSF，△QET，△PDW 的面积和$=3S_{\triangle RSF}=3\times\frac{\sqrt{3}}{12}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$\therefore S_{\triangle RPQ}=S_{\triangle ADS}+S_{\triangle CFT}+S_{\triangle BEW}=3S_{\triangle ADS}$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$，得 $x^2=\frac{4}{9}$，

解得 $x=\frac{2}{3}$或 $x=-\frac{2}{3}$（不合题意，舍去）

$\therefore x=\frac{2}{3}$，即 AD 的长为$\frac{2}{3}$.

故答案为：a；$\frac{2}{3}$.

7．阅读下面材料：小腾遇到这样一个问题：如图 1，在△ABC 中，点 D 在线段 BC 上，∠$BAD=75^\circ$，∠$CAD=30^\circ$，$AD=2$，$BD=2DC$，求 AC 的长．

小腾发现，过点 C 作 $CE\parallel AB$，交 AD 的延长线于点 E，通过构造△ACE，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图 2）．

请回答：∠ACE 的度数为__75°__，AC 的长为__3__．

参考小腾思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，∠$BAC=90^\circ$，∠$CAD=30^\circ$，∠$ADC=75^\circ$，AC 与 BD 交于点 E，$AE=2$，$BE=2ED$，求 BC 的长．

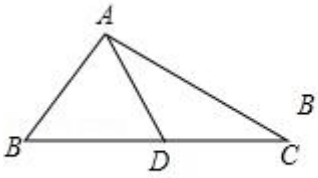


图1

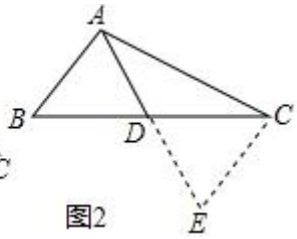


图2

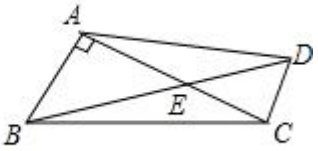


图3

【解答】解：$\angle ABC+\angle ACB=\angle ECD+\angle ACB=\angle ACE=180°-75°-30°=75°$，

$\angle E=75°$，$BD=2DC$，

$\therefore AD=2DE$，

$AE=AD+DE=3$，

$\therefore AC=AE=3$，

$\angle ACE=75°$，AC 的长为 3．

过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F．

$\because \angle BAC=90°=\angle DFA$，

$\therefore AB\parallel DF$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle FDE$，

$\therefore \frac{AB}{DF}=\frac{AE}{EF}=\frac{BE}{DE}=2$，

$\therefore EF=1$，$AB=2DF$．

在$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD=30°$，$\angle ADC=75°$，

$\therefore \angle ACD=75°$，$AC=AD$．

$\because DF\perp AC$，

$\therefore \angle AFD=90°$，

在$\triangle AFD$ 中，$AF=2+1=3$，$\angle FAD=30°$，

$\therefore DF=AF\tan 30°=\sqrt{3}$，$AD=2DF=2\sqrt{3}$．

$\therefore AC=AD=2\sqrt{3}$，$AB=2DF=2\sqrt{3}$．

$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{6}$．

